

## A relativistic Dirac model for the study of heavy quarkonia

We study the spectra of charmonium and bottomonium using a complete one gluon exchange approach based on a relativistic  $q\bar{q}$  interaction model with Dirac spinors in momentum space. We do not perform any nonrelativistic approximation.

We fit the lowest-lying levels and predict the higher-lying resonances reproducing the overall structure of the spectra. The adopted interaction only includes a vector and a scalar contribution.

Screening factors are introduced in the momentum space to simulate the quark model *unquenching*.

The numerical values of the free parameters of the model are determined taking into account also the experimental uncertainties of the resonance energies. In this way, we are able to obtain the uncertainties of the theoretical resonance masses and the correlation among the free parameters of the model.

Maurizio De Sanctis, David Molina  
(Universidad Nacional de Colombia, Grupo de Campos y Partículas),  
César Fernández-Ramírez  
(Instituto de Ciencias Nucleares, Universidad Nacional Autónoma de México,  
Ciudad de México 04510, Mexico)

Results for Charmonium published in Phys. Rev. D 95, 094021 (2017)  
Results for Bottomonium, to be published, also with E. Santopinto (INFN  
Genova, Italy)

Univ. Los Andes (Bogotá), 27 July 2017

## Sistemas microscópicos y espectroscopía

---

Partículas ligadas por una interacción poseen estados ligados que son autoestados de la Energía, del Momentum Angular y de la Paridad (..)

El estudio teórico y experimental de estos estados se llama

### Espectroscopía

Ejemplo muy bien conocido:

Átomo de Hidrógeno ( $p e^-$ ) y positronio ( $e^+ e^-$ ) - Ecuación de Schrödinger - no relativista

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m_r} + V(r), \quad V(r) = -\frac{e^2}{r}, \quad e^2 = \alpha \cdot \hbar c$$

$$H|\psi_{n,l}\rangle = E_n|\psi_{n,l}\rangle, \quad E_n = -\frac{1}{2}m_r c^2 \alpha^2 \frac{1}{n^2}$$

$$n = 1, 2, 3, \dots \quad l = 0, 1, \dots, n-1, \quad \pi = (-1)^l$$

Estados excitados (inestables)

--- > excitaciones - decaimientos

--- > medición de las energías y de los demás números cuánticos

Recordamos unos números relevantes:

$$m_{e^-}c^2 = m_{e^+}c^2 = 0.511MeV, \quad m_p c^2 = 938.3MeV, \quad m_n c^2 = 939.6MeV$$

$$\hbar c = 197.3MeV \times fm, \quad \alpha = e^2/(\hbar c) = 1/137.06$$

Átomo de hidrógeno  $E_1 = -13.6 eV + \dots$  ( $m_r \simeq m_{e^-}$ )

Positronio (inestable  $-- > \gamma + \gamma$ )  $E_1 = -6.8 eV + \dots$  ( $m_r = m_{e^-}/2$ )

La estructura de los niveles depende del Hamiltoniano del sistema, en particular de la interacción.

Ejemplo teórico alternativo: el Oscilador Armónico

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m_r} + V(r) , \quad V(r) = \frac{1}{2}m_r\omega^2r^2$$

$$H|\psi_{n,l}\rangle = E_n|\psi_{n,l}\rangle , \quad E_n = (n + \frac{3}{2})\hbar\omega$$

$$n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad l = n, n-2, \dots, 0(1) \quad \pi = (-1)^l$$

Átomos --- interacción e.m. conocida --- problema de muchos cuerpos  
- interacción mútua de los electrones --- > espectros

Núcleos --- interacción fuerte entre nucleones no conocida --- problema  
de muchos cuerpos --- > modelos --- > espectros

Problema general: Buscar la forma de la interacción para reproducir el espectro. Método aplicado para el estudio de (Átomos), Núcleos y .... partículas hadrónicas compuestas por quarks

Necesidad **absoluta** de cálculos numéricos para resolver

$$H|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle$$

## Partículas Hadrónicas y Quarks

---

Interacción Fuerte entre quarks

Las partículas hadrónicas observadas son **compuestas** por quarks

Ejemplos sencillos p: (uud)    n: (ddu) (tres quarks) Bariones  
(quark antiquark) Mesones

Tenemos seis quarks: u d s c b t    y los correspondientes antiquarks

Problema dinámico: interacción **fuerte**:  $\alpha \rightarrow \alpha_s$  (*grande*)

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/2$$

$\Delta x \rightarrow 0$      $p$  muy grande  $\rightarrow$   
 $\rightarrow$  Teoría relativista en donde aparecen estados intermedios con partículas *virtuales*

---

Mecánica Cuántica + Relatividad  $\rightarrow$  Teorías de Campo  
(única técnica exitosa, comenzando de la QED)

Necesitamos, como con la QED, una teoría *Gauge*  
de manera que sea *renormalizable*  
es decir, se puedan eliminar los infinitos de la t.d.p.

El grupo *Gauge* es el SU(3) de color, necesario para reproducir  
las propiedades generales de los hadrones

Quarks (antiquarks) en tres colores  
interactúan por medio del intercambio del gluón en 8 colores

---

## Construcción de la QCD - camino obligado -

---

Teoría no perturbativa — — — no limita a una teoría clásica como la Electrodinámica

Posibles *soluciones*:

Retículo: cálculos numéricos (QCD) — discretización el espacio-tiempo  
Modelos: posible *aproximación* a la estructura de la QCD

Sistema más estudiado: **Charmonium** ( $c\bar{c}$ ) casi un *gimnasio* para los teóricos...

Antiguo potencial de Cornell:

$$V(r) = -\frac{4}{3}\alpha_s \cdot \hbar c \cdot \frac{1}{r} + \sigma \cdot r$$

Primer término: *parecido* al potencial de Coulomb, 4/3 debido a las matrices del color

Segundo término: lineal en  $r$  — — — > posición de los niveles más altos y **Confinamiento**

Modelo no relativista sin interacciones espín-espín, (espín -órbita), tensorial

---

## Modelo relativista - Ecuación de Dirac

---

Ec. Dirac - vs - modelos relativizados (Álgebra de Poincaré)

Mejor control sobre las propiedades tensoriales de la interacción -- >  
más cerca a una (reducción de una) teoría de campo

---

Definiciones preliminares  $a$ : ket  $b$ : bra; Centro de Masa (CM)

$$\vec{p}_{1a} = -\vec{p}_{2a} = \vec{p}_a$$

$$\vec{p}_{1b} = -\vec{p}_{2b} = \vec{p}_b$$

3-momentum transferido

$$\vec{q} = \vec{p}_b - \vec{p}_a$$

---

Trabajamos en el subespacio de los espinores de energía positiva (primera aproximación)

$$u(\vec{p}_i, \vec{\sigma}_i) = \sqrt{\frac{E(\vec{p}_i) + m}{2E(\vec{p}_i)}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\vec{p}_i \cdot \vec{\sigma}_i}{E(\vec{p}_i) + m} \end{pmatrix} \chi,$$

con

$$E(\vec{p}_i) = \sqrt{\vec{p}_i^2 + m^2}$$

Aspecto técnico importante: dependencia del momentum de la interacción

$$\langle \vec{p}_b | V | \vec{p}_a \rangle = V(\vec{p}_b, \vec{p}_a)$$

Para buscar los autovalores de la energía necesitamos una ecuación integral en el espacio del momentum.

---

## La interacción

---

Término vectorial - Gauge de Coulomb

$$\langle \vec{p}_b | H^{(v)} | \vec{p}_a \rangle = V^{(v)}(\vec{q}) \left[ J_1^0 J_2^0 \left( 1 - \frac{(\Delta E)^2}{Q^2} \right) - \vec{J}_1 \cdot \vec{J}_2 \left( 1 + \frac{(\Delta E)^2}{Q^2} \right) \right].$$

con

$$\Delta E = E(\vec{p}_b) - E(\vec{p}_a),$$

$$Q^2 = \vec{q}^2 - (\Delta E)^2.$$

$$J_i^\mu = J_i^\mu(\vec{\sigma}_i; \vec{p}_b, \vec{p}_a) = \bar{u}(\vec{p}_{ib}, \vec{\sigma}_i) \gamma_i^\mu u(\vec{p}_{ia}, \vec{\sigma}_i).$$

---

Término escalar

$$\langle \vec{p}_b | H^{(s)} | \vec{p}_a \rangle = V^{(s)}(\vec{q}) I_1 I_2,$$

$$I_i = I_i(\vec{\sigma}_i; \vec{p}_b, \vec{p}_a) = \bar{u}(\vec{p}_{ib}, \vec{\sigma}_i) u(\vec{p}_{ia}, \vec{\sigma}_i).$$

## Apantallamiento (screening)

---

Cuando la energía sube se pueden producir pares quark-antiquark que reducen (apantallan) la interacción

En el espacio del momentum en nuestro modelo tenemos:

$$\bar{H}_{int}(\vec{p}_b, \vec{p}_a) \rightarrow H_{int}(\vec{p}_b, \vec{p}_a) = F_s(p_b) \bar{H}_{int}(\vec{p}_b, \vec{p}_a) F_s(p_a)$$

Factores de apantallamiento  $F_s(p_a)$  y  $F_s(p_b)$

$$F_s(p) = \frac{1 + k_s}{k_s + \exp(p^2/p_s^2)},$$

Estrictamente necesarios para reproducir el espectro.

---

Los potenciales vectoriales y escalares del modelo

$$V^{(v)}(\vec{q}) = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_{st}}{q^2} + \beta_v \frac{3b^2 - \vec{q}^2}{(\vec{q}^2 + b^2)^3},$$

$$V^{(s)}(\vec{q}) = A + \beta_s \frac{3b^2 - \vec{q}^2}{(\vec{q}^2 + b^2)^3}.$$

Para entender más claramente, en el espacio de coordenadas

$$V^{(v)}(r) = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_{st}}{r} + \beta_v \pi^2 r \exp(-rb),$$

Es decir, si  $b \rightarrow 0$  encontramos el término lineal confinante  $b$  en este modelo es un *regularizador* para evitar divergencias numéricas

---

Ecuación final Hamiltoniana del modelo

$$[K(\vec{p}_b) + M_0] \Psi(\vec{p}_b) + \int d^3 p_a H_{int}(\vec{p}_b, \vec{p}_a) \Psi(\vec{p}_a) = M \Psi(\vec{p}_b),$$

con el término cinético

$$K(\vec{p}) = 2\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$$



## Resultados

---

Fit de los parámetros del modelo a los datos experimentales de los estados más bajos del espectro — — — > predicciones para los estados más altos

Resultados preliminares para el Bottomonium

## Nuevos retos

---

- Agregar espinores de energía negativa
  
- Estudio de otros mesones — — — > pión  
(más difícil a nivel de efectos de campo)

Table 1: Valores de los parámetros obtenidos con el fit

Parameter	Potential I	Potential II
$m$ (MeV)	$1455^{+30}_{-26}$	$1364^{+46}_{-63}$
$M_0$ (MeV)	$108^{+21}_{-25}$	$270 \pm 45$
$\alpha_{st}$	$0.63^{+0.08}_{-0.06}$	$0.544^{+0.027}_{-0.060}$
$\beta_v$ (GeV <sup>2</sup> )	$0.0134^{+0.0009}_{-0.0014}$	$0.004^{+0.001}_{-0.002}$
$k_s$	$59^{+11}_{-9}$	$96^{+14}_{-10}$
$p_s$ (GeV)	$0.698^{+0.065}_{-0.067}$	$0.91^{+0.11}_{-0.06}$
$A$ (GeV <sup>-2</sup> )	$0.015 \pm 0.004$	$-0.006 \pm 0.002$
$\beta_s$ (GeV <sup>2</sup> )	0 (fixed)	$0.013^{+0.004}_{-0.003}$
$b$ (GeV)	$10^{-2}$ (no fit)	$\hbar c/b \simeq 20$ fm





